



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

SUMÁRIO

Requerente(s): **Prof. Paulinho Demeneghi**

Título do Projeto: **Objetos combinatórios, álgebras e C^* -álgebras**

Assunto: **Projeto de Pesquisa.**



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

SÍNTESE DO PROJETO DE PESQUISA

Situação: Aguardando Aprovação do Depto do Coordenador

Número: 202107038

1. Título:

Objetos combinatórios, álgebras e C^* -álgebras

2. Resumo:

Neste projeto estamos interessados em dar continuidade ao estudo de objetos combinatórios e álgebras e C^* -álgebras construídas a partir deles. Álgebras e C^* -álgebras construídas a partir de objetos combinatórios tem despertado o interesse em muitos pesquisadores da comunidade de álgebra de operadores. Na verdade, uma ampla gama de estudos foram desenvolvidos nos últimos anos com objetivo de estudar tais objetos. Podemos citar aqui, como exemplos de C^* -álgebras associadas a estes objetos, as álgebras de Cuntz-Krieger, álgebras de Exel-Laca, C^* -álgebras associadas a grafos, ultragrafos e grafos rotulados e C^* -álgebras associadas a grupoides e semigrupoides. Tais álgebras estão intimamente ligadas a uma classe de sistemas dinâmicos chamada de dinâmica simbólica.

Também, em um contexto mais algébrico, algumas construções associadas a objetos combinatórios foram desenvolvidas. Podemos citar, por exemplo, álgebras de caminhos de Leavitt inspiradas nas C^* -álgebras de grafos, o análogo para ultragrafos e álgebras de Steinberg para grupoides.

Um dos grandes problemas de muitas das áreas da matemática é o problema de classificação. Neste ponto, a área de álgebra de operadores possui diversas ferramentas que podem ser usadas para a classificação de alguns sistemas dinâmicos. Dentro do projeto de classificação, um grande passo foi dado ao se descrever, para uma classe de dinâmicas, como que as C^* -álgebras, os grupoides e a dinâmica em si estão relacionadas.

Ainda no contexto anterior, vale ressaltar que, desde o trabalho seminal de Renault, que descreveu C^* -álgebras associadas a um grupoide, percebeu-se que semigrupos inversos também poderiam ser utilizados para descrever C^* -álgebras.

Do lado puramente algébrico, as álgebras de Steinberg, por exemplo, tem atraído a atenção de muitos pesquisadores recentemente. Observou-se, por exemplo, que as álgebras de Steinberg podem ser vistas como uma versão algébrica do produto cruzado e assim os semigrupos inversos se mostram importantes também para descrever álgebras Steinberg. Tal descrição é bastante útil e provê um instrumento para transportar resultados obtidos para álgebras produto cruzado para o mundo das álgebras de Steinberg. Por exemplo, obtive uma ferramenta de indução de ideais a partir de grupos de isotropia e transporte essa ferramenta para álgebras de Steinberg. Isso permitiu mostrar que, todo ideal em uma álgebra de Steinberg é intersecção de ideais induzidos por grupos de isotropia. Estes resultados foram refinados por Steinberg e utilizados por ele e Nóra Szakács para dar uma caracterização de simplicidade para álgebras de Steinberg (inclusive para álgebras associadas a grupoides não-Hausdorff) através de condições no grupoide (minimalidade e efetividade) e uma pequena condição na álgebra em si. Embora a caracterização obtida ainda dependa de condições na álgebra, este é um grande avanço na questão da simplicidade.

Além disso, é de meu interesse adentrar em novos rumos dentro da álgebra de operadores. Em particular, é de me interesse entender a relação entre C^* -álgebras e Topos. Tanto C^* -álgebras quanto topos fornecem generalizações para espaços topológicos. Se por um lado espaços topológicos localmente compactos correspondem a C^* -álgebras comutativas, por outro lado espaços topológicos sóbrios correspondem a topos de feixes sobre estes espaços. Assim, naturalmente, tanto C^* -álgebras não comutativas, quanto topos gerais, podem ser entendidos como uma extensão da noção clássica de espaço topológico. É natural, portanto, se indagar se essas duas generalizações de espaços topológicos estão de alguma forma relacionadas. Uma tal relação é extremamente interessante para ambas as áreas, pois topos estão intimamente relacionados à geometria graças à relação deles com certos grupoides, enquanto que C^* -álgebras não comutativas estão intimamente relacionadas a grupoides também.



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

SÍNTESE DO PROJETO DE PESQUISA

Situação: Aguardando Aprovação do Depto do Coordenador

Número: 202107038

Palavras-chave:

objetos combinatórios; álgebras; C^* -álgebras;

3. Coordenador:

Nome: Paulinho Demeneghi

Departamento: MTM/CFM - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA / MTM/CFM

Tipo: Professor

Regime de Trabalho: DE

Valor Mensal: Sem remuneração

Forma de Remuneração: Sem bolsa

Carga Horária Semanal: 20.00h

4. Entidades Participantes:

Financiadores:

Valor Total: R\$ 0,00

Fundações:

Tipo de Instrumento Contratual: Não será celebrado instrumento jurídico com a UFSC.

5. Período:

Previsão de Início: 01/05/2021

Início Efetivo: A partir da data da assinatura.

Duração: 36 Meses

6. Área do Projeto:

Grande Área do Conhecimento: CIENCIAS EXATAS E DA TERRA

Área do Conhecimento: MATEMATICA

Subárea do conhecimento:ANALISE

Grupo de Pesquisa:

7. Comitê de Ética:

Não se aplica;



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

SÍNTESE DO PROJETO DE PESQUISA

Situação: Aguardando Aprovação do Depto do Coordenador

Número: 202107038

8. Equipe do Projeto:

CPF / Nome	Tipo	Período	Depto/Curso	Valor Mensal / Valor Total	Teto Excedid	Carga Hora. Semanal	Paad	Situação
Paulinho Demeneghi 012.173.280-09	Professor Coordenador	01/05/2021 à 30/04/2024	MTM/CFM - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA / MTM/CFM	R\$ 0,00 / R\$ 0,00		20.00h	Sim	

Número total de participantes na equipe do projeto: 1

0 externos à UFSC (0,00%)

1 vinculados à UFSC (100,00%)



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

SÍNTESE DO PROJETO DE PESQUISA

Situação: Aguardando Aprovação do Depto do Coordenador

Número: 202107038

9. Financiamento:

Não se aplica.

10. Propriedade Intelectual:

Não se aplica.

12. Movimentações:

Data	Responsável	Ação	Notificados	Comentários
30/04/2021 - 11:37h	Paulinho Demeneghi	Criou o projeto		
30/04/2021 - 11:37h	Paulinho Demeneghi	Enviou o projeto para aprovação	Cleverson Roberto da Luz	
30/04/2021 - 16:10h	Cleverson Roberto da Luz	Aprovou o projeto	Raphael Falcão da Hora	

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROJETO DE PESQUISA

Objetos combinatórios, álgebras e C^* -álgebras

Proponente: Paulinho Demeneghi

e-mail: paulinho.demeneghi@ufsc.br

Número de Horas Semanais: Vinte horas

Período do Projeto: 01/05/2021 - 30/04/2024

Palavras-chave: objetos combinatórios, álgebras, C^* -álgebras.

Introdução e Viabilidade

Neste projeto estamos interessados em dar continuidade ao estudo de objetos combinatórios e álgebras e C^* -álgebras construídas a partir deles. Álgebras e C^* -álgebras construídas a partir de objetos combinatórios tem despertado o interesse em muitos pesquisadores da comunidade de álgebra de operadores. Na verdade, uma ampla gama de estudos foram desenvolvidos nos últimos anos com objetivo de estudar tais objetos. Podemos citar aqui, como exemplos de C^* -álgebras associadas a estes objetos, as álgebras de Cuntz-Krieger [1, 2, 3], álgebras de Exel-Laca [4], C^* -álgebras associadas à grafos, ultragrafos e grafos rotulados [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13] e C^* -álgebras associadas a grupoides e semigrupoides [14, 15, 16]. Tais álgebras estão intimamente ligadas a uma classe de sistemas dinâmicos chamada de dinâmica simbólica.

Também, em um contexto mais algébrico, algumas construções associadas a objetos combinatórios foram desenvolvidas. Podemos citar, por exemplo, álgebras de caminhos de Leavitt inspiradas nas C^* -álgebras de grafos [17], o análogo para ultragrafos [18] e álgebras de Steinberg para grupoides [19].

Um dos grandes problemas de muitas das áreas da matemática é o problema de classificação. Neste ponto, a área de álgebra de operadores possui diversas ferramentas que podem ser usadas para a classificação de alguns sistemas dinâmicos. Dentro do projeto de classificação, o artigo [20] deu um grande passo ao descrever para uma classe de dinâmicas, como que as C^* -álgebras, os grupoides e a dinâmica em si estão relacionadas.

Ainda no contexto anterior, vale ressaltar que, desde o trabalho seminal de Renault [14], que descreveu C^* -álgebras associadas a um grupoide, percebeu-se que semigrupos inversos também poderiam ser utilizados para descrever C^* -álgebras. Vide, por exemplo, [21, 16].

Do lado puramente algébrico, as álgebras de Steinberg, por exemplo, tem atraído a atenção de muitos pesquisadores recentemente. Observou-se, por exemplo, que as álgebras de Steinberg podem ser vistas como uma versão algébrica do produto cruzado [22, 23] e assim os semigrupos inversos se mostram importantes também para descrever álgebras Steinberg. Tal descrição é bastante útil e provê um instrumento para transportar resultados obtidos para álgebras produto cruzado para o mundo das álgebras de Steinberg. Por exemplo, em [23], obtive uma ferramenta de indução de ideais a partir de grupos de isotropia e transporte essa ferramenta para álgebras de Steinberg. Isso permitiu mostrar que, todo ideal em uma álgebra de Steinberg é intersecção de ideais induzidos por grupos de isotropia. Estes resultados foram refinados por Steinberg e utilizados por ele e Nóra Szakács em [24] para dar uma caracterização de simplicidade para álgebras de Steinberg (inclusive para álgebras associadas a grupoides não-Hausdorff) através de condições no grupoide (minimalidade e efetividade) e uma pequena condição na álgebra em si. Embora a caracterização obtida ainda dependa de condições na álgebra, este é um grande avanço

na questão da simplicidade.

Além disso, é de meu interesse adentrar em novos rumos dentro da álgebra de operadores. Em particular, é de meu interesse entender a relação entre C^* -álgebras e *Topos*. Vide por exemplo [25]. Tanto C^* -álgebras quanto *topos* fornecem generalizações para espaços topológicos. Se por um lado espaços topológicos localmente compactos correspondem a C^* -álgebras comutativas, por outro lado espaços topológicos *sóbrios* correspondem a *topos* de feixes sobre estes espaços. Assim, naturalmente, tanto C^* -álgebras não comutativas, quanto *topos* gerais, podem ser entendidos como uma extensão da noção clássica de espaço topológico. É natural, portanto, se indagar se essas duas generalizações de espaços topológicos estão de alguma forma relacionadas. Uma tal relação é extremamente interessante para ambas as áreas, pois *topos* estão intimamente relacionados à geometria graças à relação deles com certos grupoides desenvolvida em trabalhos como [26, 27, 28], enquanto que C^* -álgebras não comutativas estão intimamente relacionadas a grupoides também [14].

Descrição dos Objetivos

Entre os problemas que esse projeto de pesquisa visa contribuir estão:

- (1) como a classificação das álgebras está relacionada com a classificação dos objetos utilizados para construí-las?
- (2) que tipos de informações a álgebra trás do objeto usado para construí-la e vice-versa?
- (3) como as diversas construções de álgebra de operadores estão relacionadas entre si?
- (4) como se relacionam C^* -álgebras e topos?

De um modo geral, a pesquisa proposta visa procurar relações entre objetos de áreas distintas e interpretar teoremas já provados de uma área do ponto de vista da outra área; generalizar resultados tentando adaptar as técnicas utilizadas para o novo contexto; verificar a necessidade de certas hipóteses em dado resultado; usar exemplos como laboratórios, isto é, interpretar resultados gerais em exemplos específicos para ter oferecer um melhor entendimento dos exemplos.

Vale destacar também que pretendo incluir nesse projeto, a um nível mais elementar de estudo, um estudante de Graduação e um estudante de Pós-Graduação em Matemática que já entraram em contato comigo.

Publicações do Autor nos Últimos Três Anos

1. P. Demeneghi, *The ideal structure of Steinberg Algebras*. Advances in Mathematics (2019), vol. 352, 777–835.

Referências Bibliográficas

- [1] CUNTZ, J., K. W. A class of C^* -algebras and topological markov chains. *Invent Math.*, v. 56, p. 251–268, 1980.
- [2] M. ENOMOTO, Y. W. A graph theory for C^* -algebras. *Math. Japon.*, v. 25, p. 435–442, 1980.
- [3] RAEBURN, I. Graph algebras, 2005.
- [4] EXEL, R.; LACA, M. Cuntz-krieger algebras for infinite matrices. *J. reine angew. Math.*, v. 512, p. 119–172, 1999.
- [5] BATES, T. The ideal structure of the C^* -algebras of infinite graphs. *Illinois J. Math.*, v. 46, p. 1159–1176, 2002.
- [6] T. BATES, D. PASK, I. R.; SZYMANSKI, W. The C^* -algebras of row-finite graphs. *New York J. Math.*, v. 6, p. 307–324, 2000.
- [7] N. FOWLER, M. L.; RAEBURN, I. The C^* -algebras of infinite graphs. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 128, p. 2319–2327, 2000.
- [8] KUMJIAN, A.; PASK, D. C^* -algebras of directed graphs and group actions. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, v. 19, p. 1503–1519, 1999.
- [9] A. KUMJIAN, D. PASK, I. R. Cuntz-krieger algebras of directed graphs. *Pacific J. Math.*, v. 184, p. 161–174, 1998.
- [10] PATERSON, A. L. T. Graph inverse semigroups, groupoids and their C^* -algebras. *J. Operator Theory*, v. 48, p. 645–662, 2002.
- [11] RAEBURN, I.; SZYMANSKI, W. Cuntz-krieger algebras of infinite graphs and matrices. *Trans. Amer. Math. Soc.*, v. 356, p. 39–59, 2004.
- [12] I. RAEBURN, M. T.; WILLIAMS, D. P. Classification theorems for the C^* -algebras of graphs with sinks. *Bull. Austral. Math. Soc.*, v. 70, p. 143–161, 2004.
- [13] TOMFORDE, M. A unified approach to exel-laca algebras and C^* -algebras associated to graphs. *J. Operator Theory*, v. 50, p. 345–368, 2003.

- [14] RENAULT, J. A groupoid approach to C^* -algebras / jean reault. 10 2017.
- [15] A. KUMJIAN, D. PASK, I. R. J. R. Graphs, groupoids, and cuntz-krieger algebras. *J. Funct. Anal.*, v. 144, p. 505–541, 1997.
- [16] EXEL, R. Inverse semigroups and combinatorial C^* -algebras. *Bull. Braz. Math. Soc.*, v. 39, n. 2, p. 191–313, 2008.
- [17] G. ABRAMS, G. A. P. The leavitt path algebra of a graph. *Journal of Algebra*, v. 293, p. 319–334, 2005.
- [18] M. IMANFAR, A. POURABBAS, H. L. The leavitt path algebra of ultragraphs. *ArXiv e-prints*, 2017.
- [19] STEINBERG, B. A groupoid approach to discrete inverse semigroup algebras. *ArXiv e-prints*, 2009.
- [20] M. T. CARLSEN, E. RUIZ, A. S. M. T. Reconstruction of groupoids and C^* -rigidity of dynamical systems. *ArXiv e-prints*, 2017.
- [21] PATERSON, A. *Groupoids, Inverse Semigroups, and their Operator Algebras*. Birkhäuser Basel, 1999. v. 170 of *Progress in Mathematics*.
- [22] BEUTER, V.; GONÇALVES, D. The interplay between Steinberg algebras and partial skew rings. *Journal of Algebra*, v. 497, p. 337–362, 05 2017.
- [23] DEMENEGHI, P. The ideal structure of steinberg algebras. *ArXiv e-prints*, 2018.
- [24] STEINBERG, B.; SZAKÁCS, N. Simplicity of inverse semigroup and \tilde{A} -tale groupoid algebras. *Advances in Mathematics*, v. 380, p. 107611, 2021.
- [25] HENRY, S. Toposes, quantales and C^* -algebras in the atomic case. *arXiv: Category Theory*, 2013.
- [26] JOYAL, A.; TIERNEY, M. An extension of the galois theory of grothendieck. *American Mathematical Society*, 1984.
- [27] A. JOYAL, I. M. Toposes as homotopy groupoids. *Advances in Mathematics*, v. 80, p. 22–38, 1990.
- [28] BUNGE, M. An application of descent to a classification theorem for toposes. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, v. 107, p. 59–79, 1990.
- [29] CONNES, A. Noncommutative geometry. *Academic press*, 1995.

Florianópolis, 29 de abril de 2021.



Documento assinado digitalmente
Paulinho Demeneghi
Data: 29/04/2021 21:56:28-0300
CPF: 012.173.280-09
Verifique as assinaturas em <https://v.ufsc.br>

Paulinho Demeneghi

